
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

PARAMETRICI PER IL PROBLEMA DI CAUCHY PER
EQUAZIONI FUCHSIANE

1 Marzo 1984

Il problema della esistenza e regolarità della soluzione di un problema di Cauchy (pdC) per equazioni di tipo Fuchs è stato studiato con vari metodi da molti autori (cfr. Baonendi-Goulaouic [1], N. Hanges [2], H. Tahara [3]). Vogliamo qui dare un'idea di come si possa costruire una parametrice a destra e a sinistra per un pdC del tipo seguente (cfr. lavoro in preparazione con J. Lewis e C. Parenti [4]).

Siano $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$; consideriamo $(D_{x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j})$

$$(0.1) \quad P(t, x, \partial_t, D_x) = t^k P_m(t, x, \partial_t, D_x) + t^{k-1} P_{m-1}(t, x, \partial_t, D_x) + \dots \\ + P_{m-k}(t, x, \partial_t, D_x)$$

dove

$$i) \quad P_j(t, x, \partial_t, D_x) = \sum_{i=0}^j a_{j,i}(t, x, D_x) \partial_t^i, \quad a_{j,i} \text{ operatori differenzia-}$$

li a coefficienti $C^\infty([-T, T] \times \Omega)$, $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, omogenei di ordine $j-i$,

$$ii) \quad a_{m,m}(t, x) \equiv 1$$

iii) Consideriamo il polinomio $C \ni \tau \rightarrow P_m(t, x, \tau, \xi) =$

$$= \sum_{i=0}^m a_{m,i}(t, x, \xi) \tau^i, \quad t \in]-T, T[, \quad (x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0. \text{ Supponiamo}$$

che tale polinomio abbia sue radici distinte puramente immaginarie $\tau = \sqrt{-1} \lambda_r(t, x, \xi)$, $r = 1, \dots, m$, $\lambda_r \in C^\infty([-T, T] \times (T^*\Omega \setminus 0))$, reale e positivamente omogenea di grado 1. (Ipotesi di iperbolicità stretta di P_m).

iv) $(x, \xi) \in S^*\Omega$ consideriamo il polinomio (detto polinomio indiciale

di P):

$$I_p(x, \xi, \zeta) = \sum_{j=0}^k a_{m-j, m-j}(0, x, \xi) \zeta(\zeta-1) \dots (\zeta-(k-j)+1), \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Faremo l'ipotesi

$$(0.2) \quad \forall (x, \xi) \in S^*\Omega, \quad \forall \zeta \in \mathbb{Z}_+, \quad I_p(x, \xi; \zeta) \neq 0$$

Per P consideriamo il seguente pdC: sia $f \in C^\infty(\]-T, T[; E'(\Omega))$, $g_0, \dots, g_{m-k-1} \in E'(\Omega)$, trovare $u \in C^\infty(\]-T, T[; D'(\Omega))$ tale che

$$(0.3) \quad \begin{cases} Pu = f, & \text{in } \]-T, T[\times \Omega, \\ \partial_t^j u|_{t=0} = g_j, & 0 \leq j \leq m-k-1, \text{ in } \Omega \end{cases}$$

La costruzione di una parametrice sinistra (destra) per il pdC (0.3) verrà fatta in vari passi:

- i) riduzione al caso di "peso zero", ossia $k = m$
- ii) trasformazione della equazione così ottenuta in un sistema di ordine

$$N = \frac{m(m+1)}{2} - 1 \text{ equazioni, della forma}$$

$$(0.4) \quad t \partial_t \vec{u} = t A(t, x, D_x) \vec{u} + B(t, x, D_x) \vec{u} + \vec{f}$$

con A, B operatori pseudodifferenziali di ordine 1, o risp. del tipo precisato più sotto

- iii) Detto P il sistema $t \partial_t - t A - B$ si costruisce un operatore di disaccoppiamento Q tale che

$$(0.5) \quad PQ - QP \equiv 0,$$

dove \tilde{P} è il sistema $t\partial_t - t_A - \tilde{B}$ e \tilde{B} è diagonale per grandi valori di $t|\xi|$

iv) Costruzione di una parametrice per \tilde{P} .

Esempio. Consideriamo il pdC per l'operatore di Eulero-Poisson-Darboux

$$P(t, x, \partial_t, \partial_x) = t(\partial_t^2 - \Delta) + \alpha(t, x)\partial_t + \sum_{j=1}^n \beta_j(t, x)\partial_{x_j} + \gamma(t, x),$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$: $Pu = f$, $u|_{t=0} = g_0$.

In questo caso $I_P(x, \xi; \zeta) = \zeta + \alpha(0, x)$, sicché l'ipotesi (0.2) dice che $\alpha(0, x) \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Nel seguito diamo un'idea dei singoli passi che compongono la costruzione.

1. RIDUZIONE AL PESO ZERO

Indichiamo un modo standard di ridurre il pdC (0.3) a un'equazione del tipo $\tilde{P}v = \tilde{f}$, con \tilde{P} operatore di peso 0 (i.e. $k = m$). L'osservazione fondamentale è che $P(tv) = P^\#v$ con $P^\#$ di peso $m-(k+1)$. Infatti

$$P^\# = t^{k+1} P_m + t^{k-1} P_{m-1}^\# + \dots + P_{m-k}^\# + P_{m-(k+1)}^\# \quad \text{dove}$$

$$P_{m-j}^\# = t^{k+1-j} P_{m-j} + \sum_{h=0}^{m-j} t^{k+1-j} (h+1) a_{m-j+1, h} \partial_t^h$$

$$P_{m-(k+1)}^\# = \sum_{h=0}^{m-(k+1)} t^{k+1-(k+1)} (h+1) a_{m-k, h} \partial_t^h$$

E' facile vedere che $I_p(x, \xi; \zeta) = (\zeta - (k-m)) I_p(x, \xi; \zeta)$,

$\forall \zeta \in \mathbb{C}$, $\forall (x, \xi) \in S^*\Omega$; dunque poiché $k < m$, la (0.2) è verificata. Consideriamo ora il PdC (0.3). Sia $w \in C^\infty([-T, T[; E'(\Omega)))$ tale che $\partial_t^j w|_{t=0} = g_j$, $j = 0, 1, \dots, m-k-1$. Allora $u - w \in C^\infty([-T, T[; E'(\Omega)))$ e $\partial_t^j(u-w)|_{t=0} = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-k-1$. Dunque esiste $v \in C^\infty([-T, T[; E'(\Omega)))$ tale che $u-w = t^{m-k}v$. Basta allora risolvere $P(t^{m-k}v) = f - Pw \in C^\infty([-T, T[; E'(\Omega)))$; ma $P(t^{m-k}v) = \tilde{P}v$, \tilde{P} di peso 0 e soddisfacente le ipotesi i), ii), iii), iv).

D'ora in poi ragioneremo solo nel caso di peso 0.

Esempio. Il pdC per l'operatore di Eulero-Poisson-Darboux

$Pu = f$, $u|_{t=0} = g$ diventa (se α, β, γ sono costanti)

$$(1.1) \quad \tilde{P}v = t^2(\partial_t^2 - \Delta)v + (\alpha+2)t\partial_tv + t \sum_{j=1}^n \beta_j \partial_{x_j} v + (\alpha+t\gamma)v = f_1,$$

$$\text{dove } f_1 = f + t\Delta g - t \sum_{j=1}^n \beta_j \partial_{x_j} g - t\gamma g$$

$$\text{Inoltre } I_{\tilde{P}}(\zeta) = \zeta(\zeta-1) + (\alpha+2)\zeta + \alpha = (\zeta+1)(\zeta+\alpha)$$

2. RISOLUZIONE A SISTEMA D'UNA EQUAZIONE DI PESO 0

Indicheremo con Λ un operatore pseudodifferenziale (opd) di ordine 1 e invertibile.

Sia $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$(2.1) \quad \lambda_j(0, x, \xi) \neq c, \quad \forall (x, \xi) \in S^*\Omega, \quad j = 1, \dots, m.$$

Se T è opportuno allora

$$(2.2) \quad \lambda_j(t, x, \xi) \neq c \quad \forall (x, \xi) \in S^*\Omega, \quad \forall t \in]-T, T[, \quad j = 1, \dots, m$$

Poniamo

$$(2.3) \quad Z(x, D_x) = \sqrt{-1} \quad c \wedge$$

Sia inoltre $\gamma \in \mathbb{C}$. Si può provare che, posto

$$(2.4) \quad L = t(\partial_t - Z(x, D_x)) - \gamma,$$

si può scrivere

$$(2.5) \quad P = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{m-j} t^{m-j-k} A_{m-j-k,j}^{(\gamma)}(t, x, D_x) L^k,$$

per certi opd $A_{m-j-k,j}^{(\gamma)} \in OPS_{cl}^{m-j-k}(\Omega)$, dipendenti in modo C^∞ da t e tali che

$$i) A_{0,0}^{(\gamma)} \equiv 1$$

$$ii) \forall t \in]-T, T[, \quad \forall (x, \xi) \in T^*\Omega \quad 0$$

$$\sum_{k=0}^m \sigma_{m-k}(A_{m-k,0}^{(\gamma)})(t, x, \xi) (\tau - \sigma_1(Z))^k = P_m(t, x, \tau, \xi)$$

$$iii) \sum_{j=0}^m \sigma_0(A_{0,j}^{(\gamma)})(0, x, \xi) \zeta^{m-j} = I_p(x, \xi; \zeta + \gamma)$$

$$\text{Esempio. Poiché } (t\partial_t)^2 = L + tZ + \gamma,$$

$(t\partial_t)^2 = L^2 + t^2 Z^2 + 2t\gamma Z + 2(tZ + \gamma)L + tZ + \gamma^2$, si ha che l'operatore

(1.1) si scrive nella forma:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \tilde{P} = & L^2 - t^2((\Delta - Z^2)\Lambda^{-2})\Lambda^2 + 2tZL + (2\gamma + \alpha + 1)L \\ & + t(\alpha + 2 + 2\gamma)Z + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \partial_{x_j} \Lambda^{-1}\right)\Lambda + (\alpha + 1)\gamma + \gamma^2 + \alpha + t\gamma. \end{aligned}$$

Inoltre il polinomio scritto in iii) è

$$\zeta^2 + (2\gamma + \alpha + 1)\zeta + (\alpha + 1)\gamma + \gamma^2 + \alpha = (\zeta + \gamma + 1)(\zeta + \gamma + \alpha).$$

Supponiamo ora $\gamma \notin \mathbb{Z}$. E' possibile provare che, se si pone,

$$\begin{cases} u_1^{(1)} = (t\Lambda)^{m-1} u \\ u_2^{(1)} = (t\Lambda)^{m-2} Lu \\ u_m^{(1)} = L^{m-1} u \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_1^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-1} \\ u_2^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-2} L^2 u \quad h=2, \dots, m-1 \\ u_{m-h}^{(h)} = L^{m-h} u \\ u_{m-h+1}^{(h)} = (t\Lambda)^{m-h-1} u \end{cases}$$

$$e \vec{u} = (u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{m-1}^{(2)}, \dots, u_1^{(h)}, \dots, u_{m-h+1}^{(h)}, \dots, u_1^{(m-1)}, u_2^{(m-1)})$$

l'equazione $Pu = f$ viene tradotta in un sistema *equivalente* $N \times N$ del tipo

$$(2.8) \quad t \partial_t \vec{u} = tA(t, x, D_x) \vec{u} + B(t, x, D_x) \vec{u} + \vec{f},$$

dove A è una matrice $N \times N$ di ord di ordine 1 del tipo

$$A = \begin{bmatrix} A' & * \\ 0 & I_{N-m} \quad Z \end{bmatrix}, \quad A' \text{ ha gli autovalori coincidenti con le radici di } P_m.$$

B è una matrice $N \times N$ di opd di ordine 0 e si ha che

$$\det(\lambda I_N - \sigma_0(B))(0, x, \xi) = I_p(x, \xi; \lambda) q(\lambda - \gamma)$$

$$\text{con } q(\zeta) = (\zeta - (m-1))(\zeta - (m-2)) \prod_{j=3}^{m-1} (\zeta - (m-j))^j$$

Osserviamo esplicitamente che la scelta fatta di γ assicura che la condizione (0.2) è verificata. Ancora: la condizione (0.2) garantisce che il sistema (2.8) è equivalente alla equazione di partenza.

Esempio. Ponendo $u_1 = t\Lambda u$, $u_2 = Lu$, $u_3 = u$ nell'equazione di Eulero-Poisson-Darboux a peso 0 si ha:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= t\Lambda u_2 + u_1 \\ Lu_2 &= f_1 + t((\Delta - Z^2)\Lambda^{-2})\Lambda u_1 - 2tZu_2 - (2\gamma + \alpha + 1)u_2 \\ &\quad - \left[(\alpha + 2 + 2\gamma) Z\Lambda^{-1} + \sum_{j=1}^m \beta_j \partial_{x_j} \Lambda^{-1} \right] u_1 \\ &\quad - (\alpha + 1)\gamma + \gamma^2 + \alpha + t\gamma u_3 \\ Lu_3 &= u_2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

che dà il sistema

$$t\partial_t \vec{u} = t \begin{bmatrix} Z & \Lambda & 0 \\ (\Lambda^2 - Z^2)\Lambda^{-1} & -Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 0 & 0 \\ -(\alpha + 2 + 2\gamma)Z\Lambda^{-1} & -(\gamma + \alpha + 1) & -(\alpha + 1)\gamma - \gamma^2 - \alpha - t\gamma \\ -\sum_{j=1}^n \beta_j \partial_{x_j} \Lambda^{-1} & 1 & \gamma \end{bmatrix} \vec{u}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che la matrice di ordine 1 ha autovalori $Z, \pm i|\xi|$, mentre la matrice di ordine 0 ha autovalori $1 + \gamma, -1, -\alpha$; per la scelta fatta di γ ($\notin Z$) la condizione (0.2) è soddisfatta.

3. COSTRUZIONE DI UN OPERATORE DI DISACCOPLIAMENTO

Introduciamo ora alcuni classi di simboli per opd. Indichiamo

$$\Omega_T =]-T, T[\times \Omega \text{ e } S^{m,k}(\Omega_T) = \{a(t,x,\xi) \in C^\infty(\Omega_T \times R_\xi^n) \mid$$

$$|a_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \leq C_{\Omega,T}, \quad |\xi|^{m-|\beta|} (|t| + \frac{1}{|\xi|})^{k-j}, \quad \forall j, \alpha, \beta,$$

$$\forall (t,x) \in \Omega_T' \subset \Omega_T, \quad \forall \xi, \quad |\xi| > 1\}$$

$$\text{Poniamo } S^{-\infty,k} = \bigcap_m S^{m,k}, \quad S^{m,+\infty} = \bigcap_k S^{m,k}.$$

Inoltre diremo che un operatore $E: C^\infty(]-T, T[; C_0^\infty(\Omega)) \rightarrow C^\infty(\Omega_T)$ è parzialmente regolarizzante se esiste $r(t,x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega_T)$ tale che

$$(3.1) \quad (Rf)(t,x) = \int_{\Omega} r(t,x,y) f(t,y) dy, \quad f \in C^\infty(]-T, T[; C_0^\infty(\Omega)),$$

ops $^{m,k}_{S^{m,k}(\Omega_T)}$ indicherà la classe degli operatori definiti da simboli in $S^{m,k}_{S^{m,k}(\Omega_T)}$ modulo parzialmente regolarizzanti.

Per la costruzione del disaccoppiatore per il sistema P occorre precisare nelle classi $S^{m,k}$ il comportamento asintotico per grandi valori di $t/|\xi|$: essenzialmente per questa ragione si è indotti a introdurre delle sottoclassi di $S^{m,k}$. Nel seguito indichiamo con ξ' il vettore $\xi/|\xi|$, $\xi \neq 0$. Definiamo

$$S^k_{\Omega}(\Omega) = \{\phi(x, \xi'; z) \mid C^\infty_{\Omega \times \mathbb{R}^{n-1}_{\xi'}} \times \mathbb{R}_z \mid \phi \sim \sum_{j \geq 0} \phi_{-j}(x, \xi') z^{k-j}, \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\text{con } \phi_{-j}(x, \xi') \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n-1}_{\xi'})\}$$

Il simbolo \sim significa che $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \forall p$, qualunque siano $\theta_1, \dots, \theta_q$ campi vettoriali C^∞ in \mathbb{R}^{n-1} , si ha

$$(3.2) \quad \rho_z^p \partial_x^\alpha \theta_1 \dots \theta_q (\phi - \sum_{j \in M} \phi_{-j} z^{k-j}) \leq C |z|^{k-M-p}, \quad |z| \gg 1, \\ \forall (x, \xi')$$

Definiamo ancora

$$\Sigma^{m,k}(\Omega_T) = \{a(t, x, \xi) \in C^\infty(\Omega_T \times R^n) \mid \exists \hat{a}(x, \xi'; z) \in S^k(\Omega) \text{ per cui}$$

$$a(t, x, \xi) = |\xi|^{m-k} \hat{a}(x, \frac{\xi}{|\xi|}; t|\xi|)\}$$

Ovviamente $\Sigma^{m,k} \subset S^{m,k}$.

Indichiamo con $\hat{\Sigma}^{m,k}(\Omega_T)$ la classe di simboli $a \in S^{m,k}(\Omega_T)$

per cui esistono $a_j \in \Sigma^{m,k+j}(\Omega_T)$, $j \geq 0$, tali che

$$a = \sum_{j \in M} a_j \in S^{m,k+M}(\Omega_T).$$

OP $\Sigma^{m,k}$ è definito modulo parzialmente regolarizzante dai simboli di $\Sigma^{m,k}$,
OP $\hat{\Sigma}^{m,k}$ è definito dai simboli di $\hat{\Sigma}^{m,k}$ modulo parzialmente regolarizzanti
e modulo OPS $^{m,\infty}$.

Inoltre per la costruzione della paramettrice vengono naturalmente utilizzate versioni di tipo Hardy di $\Sigma^{m,k}$ e $\hat{\Sigma}^{m,k}$. Definiamo così:

$$HS^k(\Omega) = \{\psi \in C^\infty([0,1] \times \Omega \times \mathcal{S}_{\xi'}^{n-1} \times R_z^n) \mid \sup_{\substack{\rho \in [0,1] \\ x \in \Omega', \zeta \subset \Omega \\ \xi' \in S^{n-1}}} |\rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^j \partial_z^p \partial_{\xi'}^\alpha \theta_1 \dots \theta_q \psi| \leq$$

$$C \text{ Cost } (1+|z|)^{k-p}, \quad \forall z \in R, \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

$$HS^{m,k}(\Omega) = \{a \in C^\infty([0,1] \times \Omega_T \times R_\xi^n \times R_z^n) \mid \sup_{\rho \in [0,1]} |\rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^p \partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq \\ \leq C |\xi|^{m-|\beta|} (|t| + \frac{1}{|\xi|})^{k-j}, \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

In modo del tutto analogo si definiscono le classi

$$H\Sigma^{m,k}(\Omega_T) \text{ e } H\hat{\Sigma}^{m,k}(\Omega_T).$$

Ancora diciamo che $R: C([-T, T]; C_0^\infty(\Omega)) \rightarrow C^\infty(\Omega_T)$ è parzialmente regolarizzante di tipo Hardy (prh) se esiste $r(\rho, t, x, y) \in C^\infty([0, 1] \times (\Omega \times \Omega)_T)$ tale che $p, j, \alpha, \beta, \varepsilon > 0$,

$$\sup_{\substack{(x,y) \in \Omega' \times \Omega' \\ |t| \leq T, \langle T \\ \rho \in]0,1]}} |\rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^j \partial_t^p \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r(\rho, t, x, y)| \leq C \quad \text{e}$$

$$(Rf)(t, x) = \int_0^1 \int_\Omega r(\rho, t, x, y) f(\rho t, y) \, d\rho \, dy,$$

$$f \in C^\infty([-T, T]; C_0^\infty(\Omega)).$$

$OPHS^{m,k}$ è definito ora modulo prh, così come pure $OPH\Sigma^{m,k}$.
 $OPH\Sigma^{m,k}$ è definito modulo prh e $OPHS^{m,\infty}$.

Ciò premesso consideriamo un sistema $P = I_N \, t\partial_t - tA(t, x, D_x) - B(t, x, D_x)$, dove possiamo supporre A diagonale a blocchi con autovalori reali ($A \in OPS_{cl}^1$) e $B \in OPS_{cl}^0$, entrambi dipendenti in modo C^∞ da t . Si può provare il seguente

Teorema. Esiste $Q \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$, Q elliptico (nel senso che il simbolo di Q mod $\hat{\Sigma}^{0,1}$ è invertibile) ed esiste $\hat{B} \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}(\Omega_T)$ che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \hat{B}(t, x, \xi) &\sim \sum_{j \geq 0} \hat{b}_j \hat{b}_j^{\infty} \in \mathcal{S}^{0,j}, \quad \hat{b}_j(t, x, \xi) = |\xi|^{-j} \cdot \\ &\cdot \hat{b}_j(x, \frac{\xi}{|\xi|}; t|\xi|), \quad \hat{b}_j \in S^j(\Omega) \text{ tali che se } \hat{b}_j^{\infty} \hat{\Sigma} \hat{b}_j^{\infty} z^{j-k} \end{aligned}$$

si ha

i) $\hat{b}_j(x, \xi'; z) = \hat{b}_j(x, \xi'; z)$ se $|z|$ è abbastanza piccolo (\hat{b}_j è ottenuto

interpretando B come operatore in $OP\Sigma^{0,0}$)

ii) \hat{b}_j e $\check{b}(t, x, \xi)$ sono diagonali a blocchi per $|z|$ abbastanza grande

iii) $\text{diag}(\check{b}_{0,0}^{(0)}(x, \xi')) = \text{diag}(\hat{b}_0(x, \xi'))$.

Inoltre si ha, se $\check{P} = t\partial_t - tA - \check{B}$

$$PQ - Q\check{P} \equiv 0 \quad (\equiv 0 \Leftrightarrow = 0 \text{ mod pr}).$$

La dimostrazione è abbastanza lunga e tecnica e non può essere riportata qui; essenzialmente consiste in una generalizzazione del metodo con cui si ricava lo sviluppo asintotico per le soluzioni di sistemi con singolarità regolari (cfr. per es. Wasów [5]). Essenzialmente, operando in modo formale si cerca un simbolo $Q \sim \sum_{j \geq 0} q_j(t, x, \xi)$,

$q_j \in \Sigma^{0,j}$. L'equazione che permette di determinare q_0 è del tipo seguenti:

$$I_N t \partial_t q_0 - t [a(0, x, \xi), q_0] - b(0, x, \xi) q_0 - q_0 b(t, x, \xi) = 0$$

che, ponendo $z = t|\xi|$, può essere tradotta nella seguente:

$$(3.3) \quad I_N z \partial_z \hat{q}_0 - z [a(0, x, \xi'), \hat{q}_0] - b(0, x, \xi') \hat{q}_0 - \check{q}_0 \hat{b}(x, \xi'; z) = 0.$$

La (3.3) viene risolta formalmente per serie ($\hat{q}_0 \in S^0(\Omega)$): si pone $\hat{q}_0 \sim \sum q_{0,-j}(x, \xi') z^{-j}$; eguagliando le potenze di z si ha (ciò corrisponde a calcolare i vari termini dello sviluppo asintotico di \hat{q}_0 in $S^0(\Omega)$):

$$\tilde{q}_{0,0} a - a \tilde{q}_{0,0} = 0$$

che è soddisfatta ponendo $\tilde{q}_{0,0} = I_N$. Ancora per $\tilde{q}_{0,-1}$ si ha:

$$(3.4) \quad [\tilde{q}_{0,-1}, a] = \tilde{b} - b_0$$

Se $b = (b_{hk})_{h,k=1,\dots,\nu}$ è la matrice a blocchi di b , si cerca $\tilde{q}_{0,-1}$ nella forma $\tilde{q}_{0,-1} = (\tilde{q}_{0,-1}^{(h,k)})_{h,k=1,\dots,\nu}$, con $\tilde{q}_{0,-1}^{(h,k)} = 0$ se $h \neq k$.

Poniamo

$$\tilde{b}_0 = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ 0 & & b_{\nu\nu} \end{bmatrix},$$

allora

$$b - \tilde{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$$

Le equazioni per $\tilde{q}_{0,-1}$ sono allora del tipo

$$(3.5) \quad \sqrt{-1} (\lambda_k - \lambda_h) \tilde{q}_{0,-1}^{(h,k)} = b_{hk}, \quad h,k=1,\dots,\nu, \quad h \neq k,$$

che possano essere risolte grazie all'ipotesi iii) di pag. 3 (stretta iperbolicità di P_m). Tale procedimento può essere iterato e permette di determinare lo sviluppo asintotico di \hat{q}_0 . Gli altri termini, i.e. \hat{q}_j , richiedono un trattamento lievemente differente.

4. COSTRUZIONE DI UNA PARAMETRICE DESTRA (SINISTRA)

Consideriamo l'operatore

$$(4.1) \quad \hat{P} = I_N \partial_t - tA(t, x, D_x) - \hat{B}(t, x, D_x),$$

con A diagonale a blocchi e $\hat{B} \in Op\Sigma^{0,0}$. Faremo la seguente ipotesi, che, in vista della condizione (0.2) non è restrittiva:

$$(4.2) \quad \operatorname{Re} \hat{b}_0(x, \xi'; z) \leq -c I_N, \quad c > 1,$$

$$\forall (x, \xi') \in \Omega \times \mathcal{S}^{n-1}, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Definiamo le fasi che entrano nella costruzione della paramettrice a destra: siano $\phi_j(t, s, x, \xi) \in C^\infty([-T, T[x] - T, T[x \cap \Omega \times (R_\xi^n \setminus 0)])$ definite da

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(t, s, x, \xi) = \lambda_j(t, x, d_{Xj}(t, s, x, \xi)) \\ \phi_j(s, s, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle, \quad \xi \neq 0 \quad j = 1, \dots, \nu \end{cases}$$

Se $\rho \in [0, 1]$, le fasi che ci interessano sono allora definite da

$$(4.4) \quad \psi_j(t, \rho, x, \xi) = \phi_j(t, \rho t, x, \xi), \quad j = 1, \dots, \nu.$$

Poniamo

$$e^{i\psi(t, \rho, x, \xi)} = \begin{bmatrix} e^{i\psi_1(t, \rho, x, \xi)} I_{N_1} & & 0 \\ & e^{i\psi_2(t, \rho, x, \xi)} I_{N_2} & \\ 0 & & e^{i\psi_\nu(t, \rho, x, \xi)} I_{N_\nu} \end{bmatrix}$$

Se $f = (f_1, \dots, f_N) \in C^\infty([-T, T]; C_0^\infty(\Omega))^N$, cerchiamo la paramettrice nella forma

$$(4.5) \quad E(h; f) = \int_0^1 \int e^{i\psi(t, \rho, x, \xi)} h(t, \rho, x, \xi) \bar{f}(t, \rho, \xi) \, d\rho \, d\xi,$$

dove $h \in H_{\hat{\Sigma}^{0,0}}(\Omega_T)$, $h \sim \sum_{j \geq 0} h_j$ è tale che risulti

$$(4.6) \quad \mathcal{P} E(h, \cdot) - I_N: C^\infty([-T, T]; E(\Omega))^N \rightarrow C([-T, T] \times \Omega)^N.$$

Si ha

$$\begin{cases} \mathcal{P} E(h; f) = f + E(I_N(t \partial_t - \rho \partial \rho - 1)h; f) - E(q'; f) - E(p; f), \\ \text{purché} \\ h(\rho, t, x, \xi)|_{\rho=1} = I_N, \end{cases}$$

e dove $q' \in H_{\hat{\Sigma}^{0,1}}(\Omega_T)$, e si è posto (con notazione a blocchi $p =$

$$= (p^{(\sigma, \sigma')})_{1 \leq \sigma, \sigma' \leq \nu})$$

$$(4.8) \quad p_{(\sigma, \sigma')} = e^{-i\psi_\sigma} \tilde{b}_{(\sigma, \sigma)} \left[e^{i\psi_\sigma} h_{(\sigma, \sigma')} \right] + \\ + \sum_{\substack{\sigma''=1 \\ \sigma'' \neq \sigma}}^{\nu} e^{i(\psi_{\sigma''} - \psi_\sigma)} \{ e^{-i\psi_{\sigma''}} \tilde{b}_{(\sigma, \sigma'')} \left[e^{i\psi_{\sigma''}} h_{(\sigma'', \sigma')} \right] \}.$$

L'osservazione cruciale è la seguente: poiché \tilde{B} è diagonale a blocchi per $t|\xi| \geq \gamma$, $\gamma > 0$, opportuno, se si denota con $\chi(x, t|\xi|)$ una funzione $\equiv 0$ se $t|\xi| \geq \gamma$, $\forall x \in \Omega' \subset \subset \Omega$; si ha

$$(4.9) \quad \dot{p}_{\sigma, \sigma'} = e^{-i\psi_\sigma} \tilde{b}_{(\sigma, \sigma)} e^{i\psi_\sigma} h_{(\sigma, \sigma')} + \\ + \sum_{\substack{\sigma''=1 \\ \sigma'' \neq \sigma}}^{\nu} e^{i(\psi_{\sigma''} - \psi_\sigma)} \{ e^{-i\psi_{\sigma''}} (\chi \tilde{B}_{(\sigma, \sigma'')})(t, x, D_x) e^{i\psi_{\sigma''}} h_{(\sigma'', \sigma')} \}$$

Al primo termine in (4.9) si applica il teorema di Hörmander (adattato alle classi Σ); per quanto riguarda il secondo termine si osserva che, mod $HS^{-\infty, 0}(\Omega_T)$, esso è un simbolo di $\hat{H}\hat{\Sigma}^{0, 0}(\Omega_T)$: infatti il fattore di \underline{fa} se $e^{i(\psi_{\sigma''} - \psi_\sigma)}$, a causa della presenza della funzione cut-off χ , può essere interpretato come un simbolo in $H\hat{\Sigma}^{0, 0}$.

Usando le notazioni:

$$\tilde{b}_0^\nu = \tilde{b}_0^\nu + \tilde{b}_0^{\nu\prime\prime}, \quad \text{con } \tilde{b}_0^{\nu\prime} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0^\nu(1, 1) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_0^{\nu(\nu, \nu)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_0^{\nu\prime\prime} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{b}_0^{\nu(\sigma, \sigma')} \\ \tilde{b}_0^{\nu(\sigma', \sigma)} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda^{\pm}(x, \xi', \rho, z) = \begin{bmatrix} e^{\pm i z (1-\rho) \lambda_1(0, x, \xi')} I_{N_1} & & \\ & e^{\pm i z (1-\rho) \lambda_2(0, x, \xi')} I_{N_2} & \\ & & 0 \\ 0 & & & e^{\pm i z (1-\rho) \lambda_N(0, x, \xi')} I_{N_N} \end{bmatrix},$$

da (4.7) si ottiene la seguente equazione di trasporto per h_0 :

$$(4.10) \quad \begin{cases} I_N (z \partial_z - \rho \partial_\rho) \tilde{h}_0 - \left[I_N + \tilde{b}_0'(x, \xi'; z) + \Lambda^- x \tilde{b}_0'' \Lambda^+ \right] \tilde{h}_0 = 0 \\ \tilde{h}_0|_{\rho=1} = I_N. \end{cases}$$

La risoluzione di (4.10) e l'iterazione di questo procedimento forniscono l'ampiezza cercata h . Si giunge così a provare il seguente

Teorema. Sia dato \tilde{p} come in (4.1), soddisfacente l'ipotesi (4.2). Allora esiste $h \in H_{\Delta}^{\infty, 0, 0}(\Omega_T)$ tale che

$$\tilde{p} E(h, f) = f + Rf, \quad \mathbf{V}f \in C^{\infty}(\cdot, T; C_0^{\infty}(\Omega))^N,$$

dove R è un opportuno operatore parzialmente regolarizzante di tipo Hardy. Un risultato analogo si ha per la paramettrice a sinistra.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC: Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 455-475.
- [2] N. HANGES: Parametries and local solvability for a class of singular hyperbolic operators, Comm. P.D.E. 3 (2) (1978), 105-152.
- [3] H. TAHARA: Fuchsian type equations and fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math. 5 (1979), 245-347.
- [4] A. BOVE, J.E. LEWIS, C. PARENTI: Lavoro in preparazione.
- [5] W. WASOW: A symptotic expansions for ordinary differential equations: R. Krieger publ. co., Huntington, N.Y., 1976.